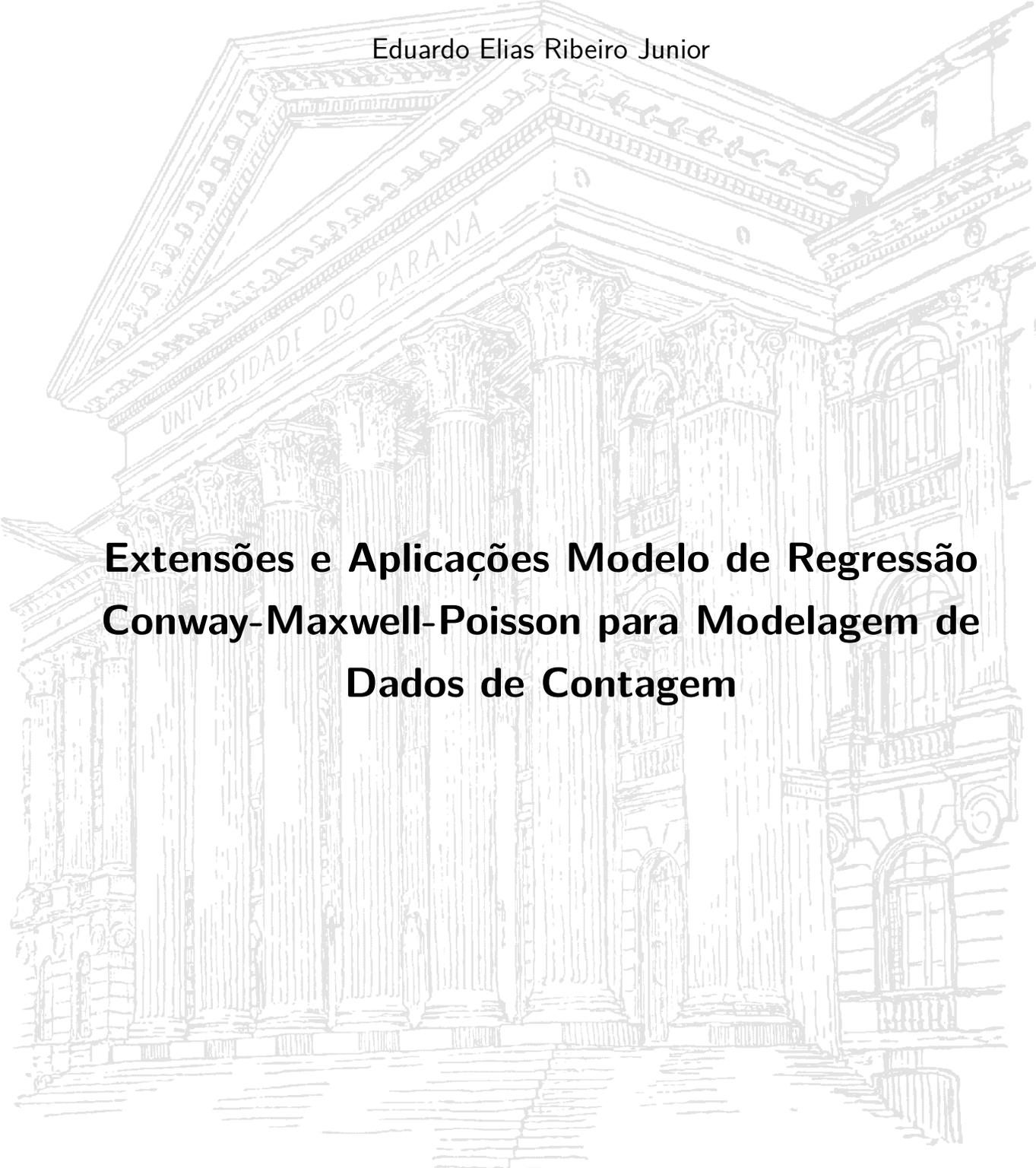


Universidade Federal do Paraná

Eduardo Elias Ribeiro Junior



**Extensões e Aplicações Modelo de Regressão  
Conway-Maxwell-Poisson para Modelagem de  
Dados de Contagem**

Curitiba

2015

Eduardo Elias Ribeiro Junior

**Extensões e Aplicações Modelo de Regressão  
Conway-Maxwell-Poisson para Modelagem de Dados de  
Contagem**

Projeto de Pesquisa apresentado à disciplina  
Laboratório A do Curso de Graduação em Es-  
tatística da Universidade Federal do Paraná,  
como requisito para elaboração do Trabalho  
de Conclusão de Curso

Universidade Federal do Paraná

Setor de Ciências Exatas

Departamento de Estatística

Orientador: Prof. Dr. Walmes Marques Zeviani

Curitiba

2015

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>OBJETIVOS</b> . . . . .	<b>6</b>
2.1	Objetivos Gerais . . . . .	6
2.2	Objetivos Específicos . . . . .	6
<b>3</b>	<b>MATERIAIS E MÉTODOS</b> . . . . .	<b>7</b>
<b>3.1</b>	<b> Materiais</b> . . . . .	<b>7</b>
3.1.1	Dados para análise . . . . .	7
3.1.2	Recursos Computacionais . . . . .	7
<b>3.2</b>	<b>Métodos</b> . . . . .	<b>8</b>
<b>4</b>	<b>CRONOGRAMA DE ATIVIDADES</b> . . . . .	<b>9</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>10</b>

# 1 Introdução

Modelos de regressão são fundamentalmente os principais métodos suporte para a prática de Estatística aplicada. Diversas áreas do conhecimento empregam estes modelos, pois eles objetivam i) descrever a relação entre uma variável dependente, de interesse, com variáveis independentes a fim de compreender este relacionamento e ii) realizar predições por meio do modelo estabelecido, principal interesse de pesquisas aplicadas.

Os modelos de regressão, na sua forma univariada e usual, consistem no estabelecimento de uma equação matemática que relaciona a média de uma variável de interesse  $Y$  aos valores de variáveis preditoras  $X_i$ . Eles consideram uma distribuição de probabilidades para  $Y$  condicional à  $X$  cuja média está associada a um preditor linear que serve para acomodar o efeitos das variáveis independentes.

Podemos destacar o modelo linear normal como o modelo predominante dentre as análises estatísticas aplicadas. Esse modelo estabelece que  $[Y | X]$  têm distribuição Normal e a média condicional de  $Y$  está associada ao preditor linear da forma  $X\beta$ .

Até a década de 70, para situações em que a variável resposta  $Y$  não se apresentava de forma contínua com domínio nos reais ou ainda quando os pressupostos do modelo linear normal não eram atendidos, a alternativa mais utilizada era encontrar alguma forma de transformação da variável resposta para atender aos pressupostos (PAULA, 2013). Porém, com a introdução dos modelos lineares generalizados (MLG) por Nelder e Wedderburn (1972) e com o avanço computacional, a análise de dados não normais passou a ter como alternativa os MLG's. Esta nova classe de modelos flexibilizou a distribuição condicional associada permitindo outras distribuições pertencentes à família exponencial de distribuições. Tal família contempla as distribuições Poisson, Binomial, Gama entre outras bem conhecidas na literatura, além da própria distribuição Normal.

Com os MLG's a modelagem de dados passou a ser mais fiel a natureza dos dados em observação, principalmente no que diz respeito ao suporte da variável. Neste contexto, a análise de variáveis aleatórias de contagem, que têm suporte no conjunto dos números naturais, foi enriquecida expressivamente. Contagens representam o número de ocorrências de um evento em um intervalo de tempo ou espaço específico. A análise desses dados pelo modelo linear normal gera estimativas que contêm erros padrões inconsistentes e podem produzir predições negativas para o número de eventos (KING, 1989).

Para análise estatística destas variáveis, temos o modelo probabilístico de Poisson, já consolidado na literatura e amplamente utilizado. Este modelo possui apenas um parâmetro, denotado por  $\lambda$ , que representa a média e também a variância, o que implica em uma relação identidade 1:1 ( $\lambda = E[Y] = V[Y]$ ). Essa propriedade, chamada de equidispersão, é

uma particularidade do modelo Poisson que pode não ser adequada à diversas situações. Quando aplicado sob negligência desta suposição, o modelo Poisson apresenta erros padrões inconsistentes para as estimativas dos parâmetros e por consequência, para toda função desses parâmetros.

Algumas abordagens para modelagem de dados de contagens com fuga de equidispersão foram propostas na literatura. O caso de superdispersão, quando a variância é maior que a média, é o mais comum e tem uma gama de métodos para análise mais extensa. A superdispersão pode ocorrer pela ausência de covariáveis importantes, excesso de zeros, diferentes amplitudes de domínio (*offset*) não considerado, heterogeneidade de unidades amostrais, entre outros (Ribeiro Jr et al., 2012). Para estes casos a abordagem mais comum é a adoção de modelos com efeitos aleatórios que capturam a variabilidade extra. Um caso particular dos modelos Poisson de efeitos aleatórios, muito adotado no campo aplicado da Estatística, ocorre quando consideramos distribuição Gama para os efeitos aleatórios, nesta situação temos expressão fechada para a função de probabilidade marginal que assume a forma Binomial Negativa.

Outra manifestação de fuga da suposição de equidispersão é a subdispersão, situação menos comum na literatura. Os processos que reduzem a variabilidade das contagens, abaixo do estabelecido pela Poisson, não são tão conhecidos quanto os que produzem variabilidade extra. Pela mesma razão, são poucas as abordagens descritas na literatura que capazes de tratar a subdispersão, uma vez que efeitos aleatórios só capturam a variabilidade extra. Podemos citar os modelos de quasi-verossimilhança como a abordagem mais utilizada, todavia não é possível recuperar a verdadeira distribuição da variável resposta nesta abordagem pois aqui a modelagem é baseada apenas nos dois primeiros momentos (PAULA, 2013).

Anteriormente à formalização dos MLG's, em um contexto de filas, Conway e Maxwell (1962) propuseram uma distribuição de probabilidades que generaliza a distribuição Poisson com a adição de mais um parâmetro, denotado por  $\nu$ , contemplando assim os casos de sub e superdispersão. Posteriormente esta distribuição foi nomeada como COM-Poisson (Conway-Maxwell-Poisson em homenagem à Richard W. Conway, William L. Maxwell, seus autores). A função distribuição de probabilidade COM-Poisson assume a forma

$$\Pr(Y = y) = \frac{\lambda^y}{(y!)^\nu} \frac{1}{Z(\lambda, \nu)}, \quad y \in \mathbb{Z}_+ \quad (1.1)$$

onde  $Z(\lambda, \nu) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{(j!)^\nu}$ ,  $\lambda > 0$  e  $\nu \geq 0$ . A flexibilidade da COM-Poisson é verificada na razão de probabilidades consecutivas,

$$\frac{\Pr(Y = y - 1)}{\Pr(Y = y)} = \frac{y^\nu}{\lambda} \quad (1.2)$$

que se caracteriza por não ser linear em  $y$  para  $nu \neq 1$ , portanto, governada pelo parâmetro extra  $\nu$  (SHMUELI et al., 2005).

Uma característica bastante relevante é que a COM-Poisson pertence à família exponencial e possui como casos particulares as distribuições Poisson, Geométrica e Binomial. Portanto, empregando a distribuição COM-Poisson na estrutura de um MLG, obtemos um modelo de regressão sem a imposição de equidispersão. Tal flexibilidade, considerando o amplo uso do modelo Poisson, significa que a COM-Poisson pode ser aplicada nestas situações e será principalmente relevante naquelas onde há fuga da equidispersão.

A aplicação do modelo de regressão COM-Poisson não apresenta forma analítica para estimação, portanto métodos numéricos são empregados. Ainda, a constante normalizadora  $Z(\lambda, \nu)$  em 1.1 se apresenta como uma série infinita que computacionalmente precisa ser truncada. Algumas aplicações do modelo de regressão COM-Poisson foram apresentadas em Shmueli et al. (2005) e Sellers e Shmueli (2010).

Pela similaridade da função de distribuição COM-Poisson em 1.1 com a Poisson, vários aspectos podem ser estendidos. Por exemplo, citamos a inclusão de efeitos aleatórios para acomodar superdispersão, porém há situações em que o delineamento do experimento sugere uma estrutura de covariância entre observações induzidas por um processo hierárquico de casualizado ou amostragem. São casos assim os experimentos em parcelas subdivididas e experimentos com medidas repetidas ou longitudinais. Tais estruturas estabelecem modelos com efeitos não observáveis que agem no nível de observação e isso pode ser incorporado no modelo de regressão COM-Poisson. Da mesma forma, excesso de zeros pode ser introduzido a esta distribuição da mesma maneira que ocorre para o modelo Poisson, através de truncamento (modelos Hurdle) ou inflação (modelos de mistura). Estas extensões para o modelo COM-Poisson ainda não são bem consolidadas na literatura e são raras suas aplicações. Uma constatação do fato é que não há implementações destas extensões nos principais softwares estatísticos.

Na literatura brasileira, aplicações do modelo COM-Poisson são escassas. Foram encontradas apenas aplicações na área de Análise de Sobrevida, mais especificamente em modelos com fração de cura. Portanto, a presente pesquisa visa colaborar com a literatura estatística brasileira apresentando e explorando alternativas para modelagem de dados de contagem e suas extensões para situações comuns em estudos experimentais e observacionais.

## 2 Objetivos

### 2.1 Objetivos Gerais

Apresentar o modelo de regressão COM-Poisson, alternativa paramétrica não comumente utilizada pela comunidade de Estatística aplicada, trazendo discussões sobre aspectos inferenciais deste modelo. Estender as aplicações do modelo COM-Poisson para situações específicas como efeitos aleatórios e excesso de zeros.

### 2.2 Objetivos Específicos

- Apresentar e discutir aspectos da distribuição COM-Poisson para modelos de regressão para dados de contagem;
- Avaliar as propriedades de soluções numéricas para 1) cálculo da densidade de probabilidade do modelo e 2) para estimação de modelos de regressão de efeito fixo;
- Propor e implementar uma extensão do modelo de regressão COM-Poisson para acomodar efeitos aleatórios;
- Propor e implementar uma extensão do modelo de regressão COM-Poisson para acomodar contagens com excesso de zeros.
- Fazer a aplicação do modelo COM-Poisson e das extensões desenvolvidas à dados reais ou simulados. Fazer comparações com os modelos disponíveis para as situações estudadas: Poisson, Quase-Poisson, Binomial Negativo, Poisson de efeito aleatório.

## 3 Materiais e Métodos

### 3.1 Materiais

#### 3.1.1 Dados para análise

Este projeto de pesquisa objetiva o estudo e avaliação do modelo de regressão COM-Poisson para modelagem de dados de contagem. Portanto, pretende-se analisar vários conjuntos de dados, preferencialmente os já analisados na literatura via outras técnicas, para efeitos de comparação.

Inicialmente temos o conjunto `defoliation`, disponível no *software* R através do pacote `legTools`<sup>1</sup>. Este conjunto de dados contém 125 observações provenientes de um experimento em casa de vegetação em delineamento inteiramente casualizado com 5 repetições, cujas plantas de algodão (*Gossypium hirsutum*) foram submetidas à níveis de desfolha artificial (5 níveis) combinados com o estágio fenológico da planta na aplicação da desfolha (5 níveis). Observou-se como variável resposta o número de capulhos produzidos ao final do ciclo cultura. Este conjunto de dados foi analisado considerando o modelo de contagem Gamma por Zeviani et al. (2014).

Ainda serão utilizados dados simulados para avaliação das propriedades numéricas, computacionais e estatísticas dos métodos de estimação e comparação de abordagens distintas em diferentes cenários.

#### 3.1.2 Recursos Computacionais

Para análise e elaboração do trabalho será utilizado o *software* R, na versão 3.2 (R Core Team, 2015). Atualmente há três bibliotecas desenvolvidas em R dedicadas à distribuição COM-Poisson:

- `COMPoissonReg` (SELLERS; LOTZE, 2011): contém o conjunto de funções desenvolvidas para as análises apresentadas no artigo *A flexible regression model for count data* (SELLERS; SHMUELI, 2010);
- `compoisson`: biblioteca com funções se dedicam apenas a obter a distribuição de probabilidades do modelo e geração de números aleatórios;

---

<sup>1</sup> Em desenvolvimento pelo Laboratório de Estatística e Geoinformação da UFPR <<http://git.leg.ufpr.br/leg/legTools>>

- **CompGLM**: é mais recente biblioteca de funções com ênfase no modelo COM-Poisson, escrita em C++. Permite a estimação de modelos de regressão além de funções probabilísticas.

Outros recursos e bibliotecas, principalmente para otimização de funções e elaboração de gráficos, serão utilizadas.

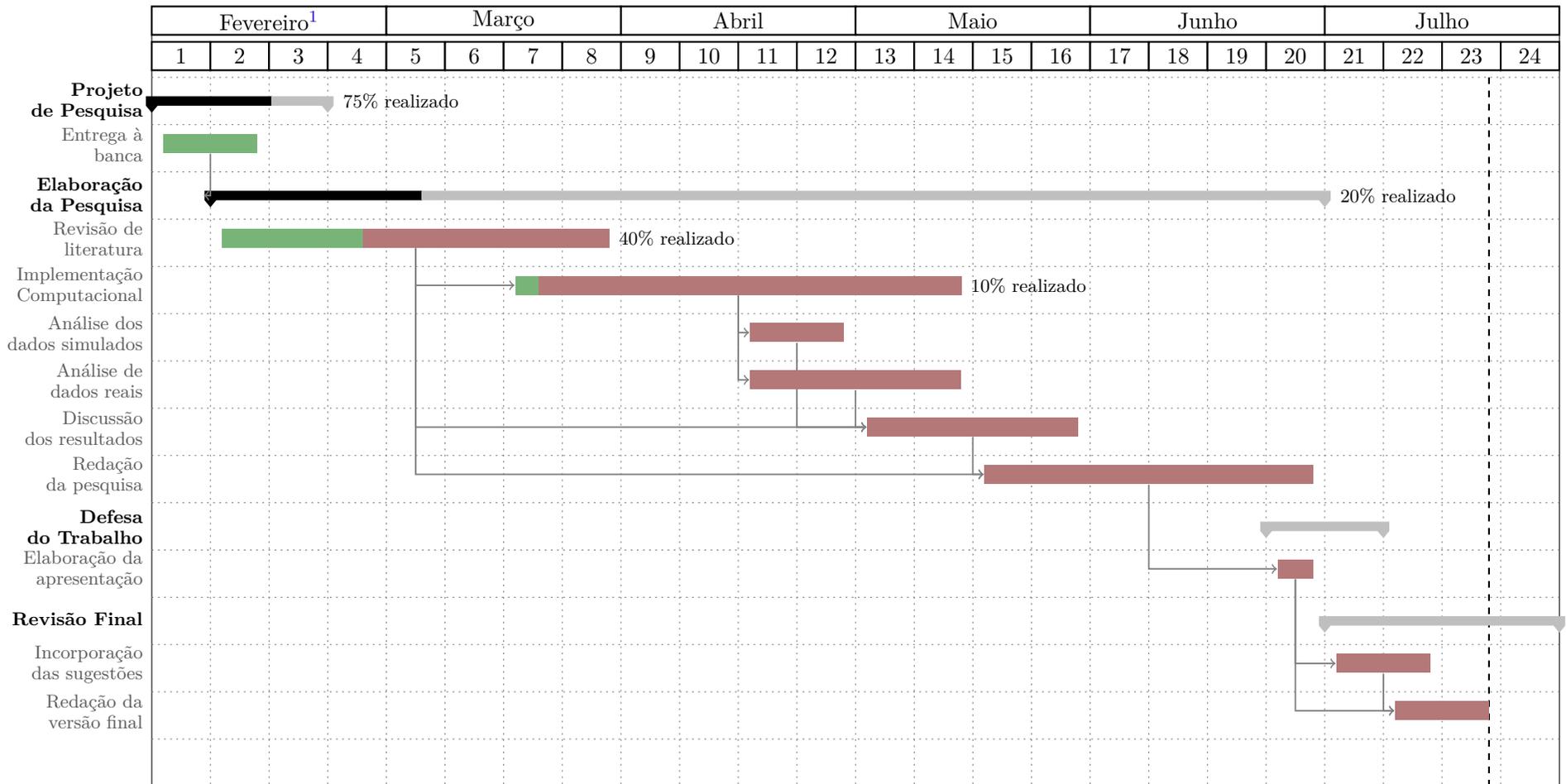
## 3.2 Métodos

Neste trabalho se fará uso da teoria de Modelos Lineares Generalizados descritas inicialmente por [Nelder e Wedderburn \(1972\)](#), cujo referência nacional é dada por [Paula \(2013\)](#) que também aborda modelos para dados de contagem com excesso de zeros. Para estimação dos modelos COM-Poisson de efeitos aleatórios, pretende-se utilizar os métodos de integração apresentados no material de [Ribeiro Jr et al. \(2012\)](#) com discussão sobre aspectos computacionais e implementação em R.

Para comparação de modelos, será considerado o teste de razão de verossimilhanças e as medidas de AIC e BIC.

Aspectos inferenciais computacionalmente intensivos serão avaliados, como intervalos de confiança para estimativas dos parâmetros via perfis da verossimilhança e intervalos de confiança para os valores preditos baseados em *bootstrap*, necessários quando o número de observações é pequeno.

# 4 Cronograma de Atividades



Entrega dia 18/07

# REFERÊNCIAS

- CONWAY, R. W.; MAXWELL, W. L. A queuing model with state dependent service rates. *Journal of Industrial Engineering*, v. 12, p. 132—136, 1962. Citado na página 4.
- KING, G. Variance Specification in Event Count Models: From Restrictive Assumptions to a Generalized Estimator. *American Journal of Political Science*, v. 33, n. 3, p. 762—784, aug 1989. ISSN 00925853. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/2111071?origin=crossref>>. Citado na página 3.
- NELDER, J. A.; WEDDERBURN, R. W. M. Generalized Linear Models. *Journal of the Royal Statistical Society. Series A (General)*, v. 135, p. 370–384, 1972. Citado 2 vezes nas páginas 3 e 8.
- PAULA, G. A. *Modelos de regressão com apoio computacional*. IME-USP São Paulo, 2013. Disponível em: <<https://www.ime.usp.br/~giapaula/textoregressao.htm>>. Citado 3 vezes nas páginas 3, 4 e 8.
- R Core Team. *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. Vienna, Austria, 2015. Disponível em: <<http://www.R-project.org/>>. Citado na página 7.
- Ribeiro Jr, P. J. et al. Métodos computacionais para inferência com aplicações em R. In: *20º Simpósio Nacional de Probabilidade e Estatística*. [s.n.], 2012. p. 282. Disponível em: <<http://leg.ufpr.br/doku.php/cursos:mcie>>. Citado 2 vezes nas páginas 4 e 8.
- SELLERS, K.; LOTZE, T. *COMPoissonReg: Conway-Maxwell Poisson (COM-Poisson) Regression*. [S.l.], 2011. R package version 0.3.4. Disponível em: <<http://CRAN.R-project.org/package=COMPoissonReg>>. Citado na página 7.
- SELLERS, K. F.; SHMUELI, G. A flexible regression model for count data. *Annals of Applied Statistics*, v. 4, n. 2, p. 943–961, 2010. ISSN 19326157. Citado 2 vezes nas páginas 5 e 7.
- SHMUELI, G. et al. A useful distribution for fitting discrete data: Revival of the Conway-Maxwell-Poisson distribution. *Journal of the Royal Statistical Society. Series C: Applied Statistics*, v. 54, n. 1, p. 127–142, 2005. ISSN 00359254. Citado na página 5.
- ZEVIANI, W. M. et al. The Gamma-count distribution in the analysis of experimental underdispersed data. *Journal of Applied Statistics*, n. October, p. 1–11, 2014. ISSN 0266-4763. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1080/02664763.2014.922168>>. Citado na página 7.