

Modelos de Regressão para Dados de Contagem com R

Prof. Dr. Walmes M. Zeviani
Eduardo E. Ribeiro Jr
Prof. Dr. Cesar A. Taconelli

Laboratório de Estatística e Geoinformação
Departamento de Estatística
Universidade Federal do Paraná

3 de maio de 2016

edujrrib@gmail.com

Disponibilização



<https://github.com/leg-ufpr/MRDCr>

<https://gitlab.c3sl.ufpr.br/leg/MRDCr>

Modelos de Regressão para Dados de Contagem com `r` - MRDCr

Conteúdo

1. Introdução
2. Modelos Lineares Generalizados
3. Modelo de Regressão Poisson
4. Modelo de Quase-Verossimilhança
5. Modelos Paramétricos Alternativos
 - 5.1 Modelo Binomial Negativo
 - 5.2 Modelo Poisson-Generalizado
 - 5.3 Modelo COM-Poisson
 - 5.4 Modelo Gamma-Count
6. Modelos para Excesso de Zeros
 - 6.1 Modelos de Barreira (Hurdle)
 - 6.2 Modelos de Mistura (Zero Inflated)
7. Modelos com Efeitos Aleatórios

1

Introdução

2

Modelos Lineares Generalizados

3

Modelo de Regressão Poisson

4

Modelo de Quase-Verossimilhança

5

Modelos Paramétricos Alternativos

5.1

Modelos Paramétricos Alternativos

Modelo Binomial Negativo

5.2

Modelos Paramétricos Alternativos

Modelo Poisson-Generalizado

5.3

Modelos Paramétricos Alternativos
Modelo COM-Poisson

Distribuição COM-Poisson I

- ▶ Nome COM-Poisson, advém de seus autores **C**onway e **M**axwell (também é chamada de distribuição Conway-Maxwell-Poisson).
- ▶ Proposta em um contexto de filas [?], essa distribuição generaliza a Poisson com a adição de um parâmetro.

Razão de probabilidades consecutivas

▶ Distribuição Poisson

$$\frac{P(Y = y - 1)}{P(Y = y)} = \frac{y}{\lambda}$$

▶ Distribuição COM-Poisson

$$\frac{P(Y = y - 1)}{P(Y = y)} = \frac{y^v}{\lambda}$$

Distribuição COM-Poisson II

Densidade de probabilidade

$$\Pr(Y = y \mid \lambda, \nu) = \frac{\lambda^y}{(y!)^\nu Z(\lambda, \nu)}, \quad \text{em que } Z(\lambda, \nu) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{(j!)^\nu}; e \quad \lambda > 0, \nu \geq 0$$

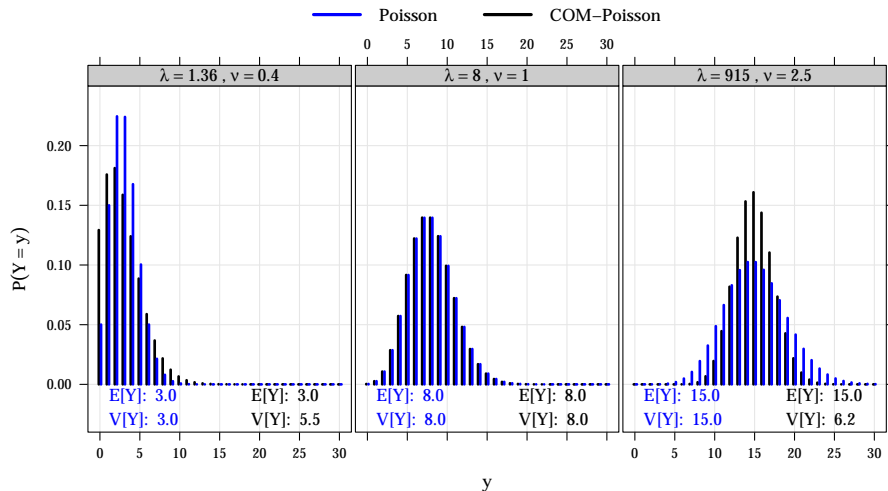
Propriedades

- ▶ $\frac{P(Y=y-1)}{P(Y=y)} = \frac{y^\nu}{\lambda}$
- ▶ $E(Y) \approx \lambda^{\frac{1}{\nu}} - \frac{\nu-1}{2\nu}$
- ▶ $V(Y) \approx \frac{1}{\nu} E(Y)$

Casos particulares

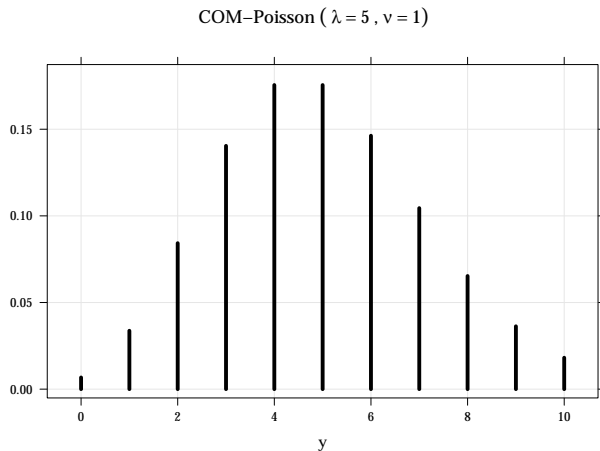
- ▶ Distribuição Poisson, quando $\nu = 1$
- ▶ Distribuição Bernoulli, quando $\nu \rightarrow \infty$
- ▶ Distribuição Geométrica, quando $\nu = 0, \lambda < 1$

Distribuição COM-Poisson III



Casos Particulares

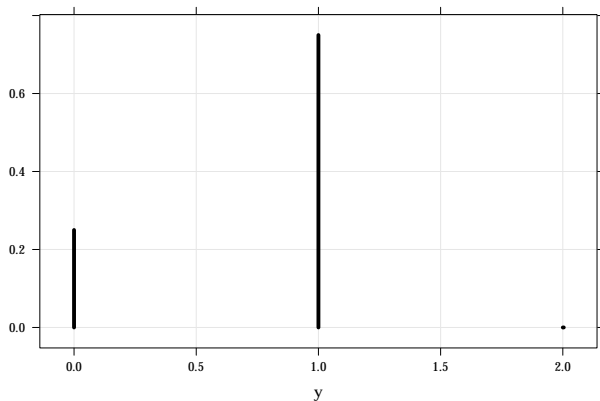
- Poisson $\nu = 1$
- Bernoulli $\nu \rightarrow \infty$
- Geométrica $\nu = 0, \lambda < 1$



Casos Particulares

- Poisson $\nu = 1$
- Bernoulli $\nu \rightarrow \infty$
- Geométrica $\nu = 0, \lambda < 1$

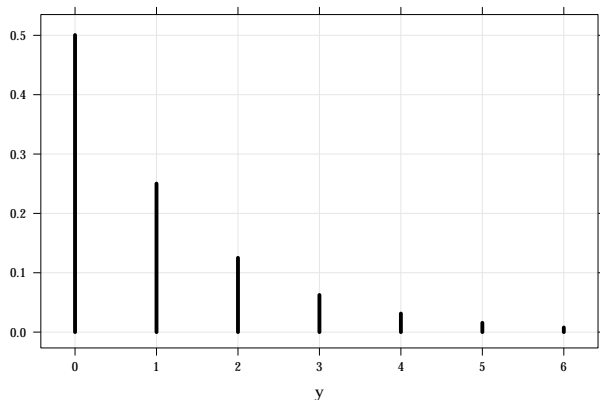
COM-Poisson ($\lambda = 3, \nu = 20$)



Casos Particulares

- Poisson $\nu = 1$
- Bernoulli $\nu \rightarrow \infty$
- Geométrica $\nu = 0, \lambda < 1$

COM-Poisson ($\lambda = 0.5, \nu = 0$)



Modelo de Regressão COM-Poisson

- Incorporando covariáveis em λ da forma $\lambda_i = \exp(X_i\beta)$, em que X_i é o vetor de covariáveis do i -ésimo indivíduo e β o vetor de parâmetros.

Função de verossimilhança

$$\begin{aligned} L(\lambda, \nu; \underline{y}) &= \prod_i^n \left(\frac{\lambda_i^{y_i}}{(y_i!)^\nu} Z(\lambda_i, \nu)^{-1} \right) \\ &= \lambda_i^{\sum_i^n y_i} \prod_i^n \frac{Z(\lambda_i, \nu)^{-1}}{(y_i!)^\nu} \end{aligned}$$

Função de log-verossimilhança

$$\begin{aligned} l(\lambda, \nu, \underline{y}) &= \log \left(\lambda_i^{\sum_i^n y_i} \prod_i^n \frac{Z(\lambda_i, \nu)^{-1}}{(y_i!)^\nu} \right) \\ &= \sum_i^n y_i \log(\lambda_i) - \nu \sum_i^n \log(y_i!) - \sum_i^n \log(Z(\lambda_i, \nu)) \end{aligned}$$

Estudos de caso

Vignette [compoisson.html](#)

`capdesfo` : número de capulhos sob efeito de desfolha (sub)

`capmosca` : número de capulhos sob exposição à mosca branca (sub)

`ninfas` : número de ninfas de mosca branca em plantas de soja (super)

5.4

Modelos Paramétricos Alternativos
Modelo Gamma-Count

6

Modelos para Excesso de Zeros

6.1

Modelos para Excesso de Zeros
Modelos de Barreira (Hurdle)

6.2

Modelos para Excesso de Zeros

Modelos de Mistura (Zero Inflated)

7

Modelos com Efeitos Aleatórios

Referências I



Conway, R. W., Maxwell, W. L. (1962). A queuing model with state dependent service rates. *Journal of Industrial Engineering*, 12, 132–136.



Paula, G. A. (2013). *Modelos de regressão com apoio computacional*. IME-USP, São Paulo.



Shmueli, G., Minka, T. P., Kadane, J. B., Borle, S., Boatwright, P. (2005). A useful distribution for fitting discrete data: Revival of the Conway-Maxwell-Poisson distribution. *Journal of the Royal Statistical Society. Series C: Applied Statistics*, 54(1), 127–142.



Winkelmann, R. (2008). *Econometric analysis of count data* (5th Ed.). Springer Science & Business Media.